22/10/19

ΠΑΡΑΔ : Να κατασκευάσετε τα πολ/μα Legendre, $P_n(x)$, στο $[-1,1]$

ΛΥΣΗ :

Η βάση μου είναι η: $|x_i\rangle = x^{i-1}$, $i=1,2,\dots,N+1$

Τότε $\langle x_m | x_n \rangle = \int_{-1}^{1} x^{m-1} x^{n-1} dx = \int_{-1}^{1} x^{m+n-2} dx$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{m+n-1}, & m+n \text{ άρτιο} \geq 2 \\ 0, & m+n \text{ περιττό} \end{cases}$$

Μέσω της διαδικασίας G-S : Παρατηρούμε ότι το πολ/μο Legendre είναι ορθογώνια αλλά όχι κανονικά, δηλ. $\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{m+n+1} \delta_{mn}$

ή $\frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$ (ορισμό)

$|x_1\rangle = 1$, $|x_2\rangle = x$, $|x_3\rangle = x^2$, $|x_4\rangle = x^3$

$|P_0\rangle = P_0(x) = x^0 = 1$

$|P_1\rangle = x$, $|P_1\rangle = N(|x_2\rangle + b|P_0\rangle)$, $\langle P_0|P_1\rangle = 0$

$\langle P_1|P_1\rangle = 2/3$

$|P_2\rangle = P_2(x)$, $|P_2\rangle = N_2(|x_3\rangle + b_1|x_2\rangle + b_2|x_1\rangle)$

$\langle P_0|P_2\rangle = 0$, $\langle P_1|P_2\rangle = 0$, $\langle P_2|P_2\rangle = 2/5$

$$\langle P_1|P_2\rangle = 0 \Rightarrow \underset{\neq 0}{N_2}(\langle P_1|x_3\rangle + b_1\langle P_1|x_2\rangle + b_2\langle P_1|x_1\rangle) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{\langle x_2|x_3\rangle} + b_1\underbrace{\langle x_2|x_2\rangle}_{=2/3} + b_2\cancel{\langle x_2|x_1\rangle} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{b_1 = 0}$$

$$\langle P_0|P_2\rangle = 0 \Rightarrow \underbrace{\langle x_1|x_3\rangle}_{=2/3} + b_2\langle x_1|x_1\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} + 2b_2 = 0 \Rightarrow \boxed{b_2 = -\frac{1}{3}}$$

$$\langle P_2|P_2\rangle = \frac{2}{5} \Rightarrow N_2\left(\langle x_3|x_3\rangle + 0\cdot\langle x_3|x_2\rangle - \frac{1}{3}\cdot\langle x_3|x_1\rangle\right) = \frac{2}{5}$$

Δε θα έπρεπε να είναι N_2^2 ? Ξαναδές!

$$\Rightarrow N_2\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{N_2 = \frac{3}{2}}$$

άρα $|P_2\rangle = P_2(x) = \frac{3}{2}\left(|x_3\rangle - \frac{1}{3}|x_1\rangle\right)$

$$= \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot(3x^2 - 1)$$

$|P_3\rangle = P_3(x) = N_3(|x_4\rangle + b_1|x_3\rangle + b_2|x_2\rangle + b_3|x_1\rangle)$

$\langle P_3|P_3\rangle = \frac{2}{7}$, $\langle P_2|P_3\rangle = \langle P_1|P_3\rangle = \langle P_0|P_3\rangle = 0$

$|P_3\rangle = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = P_3(x)$

⋮

Κλασσικά ορθογώνια πολ/μα

Επιλέγω κατάλληλο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τη συν/ση βάρους $w(x)$ κ' την N_n του ολοκληρώματος:

$$\langle P_m | P_n \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} w(x)(P_n(x))^2 \, dx = N_n$$

με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε όλα τα κλασσικά ορθογ. πολ/μα με τη βοήθεια της μεθόδου G.-S. π.χ. Legendre $\{P_n(x)\}$

Hermite $\{H_n(x)\}$

Chebysev $\{T_n(x)\}$ κ' $\{U_n(x)\}$

Laguere $\{L_n^{\nu}(x)\}$ κ.λπ.

Σχέση Parseval - Ανισότητα Bessel

Έστω ένας N-διάστατος δ.χ. S, κ' ένα N-ορθοκανονικό σύνολο διαν/των $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ που σχηματίζουν βάση του S. Τότε κάθε διάν/μα του S γράφεται ως: $\forall |x\rangle \in S$, $|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i |e_i\rangle$

Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τα a_i με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου.

Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle e_m | x \rangle = \langle e_m | \sum_{i=1}^{N} a_i e_i \rangle$$

$$= \langle e_m | a_1 e_1 \rangle + a_2 |e_2\rangle + \ldots + a_m |e_m\rangle + \ldots + a_N |e_N\rangle$$

$$= a_1 \langle e_m | e_1 \rangle + a_2 \langle e_m | e_2 \rangle + \ldots + a_m \langle e_m | e_m \rangle + a_N \langle e_m | e_N \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i \langle e_m | e_i \rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{im} = a_m$$

$\Rightarrow a_m = \langle e_m | x \rangle$ ή $a_i = \langle e_i | x \rangle$ τελικά

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i | x \rangle |e_i\rangle$$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Αν το ορθοκανονικό σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ δεν περιέχεται σε άλλο, μεγαλύτερο ορθοκ. σύστημα τότε καλείται πλήρες. Σε N-διάστατους δ.χ. ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα αποτελεί βάση. Τότε για τυχαία διάνυσμα του χώρου

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle \cdot |e_i\rangle \quad \text{κ.}$$

$$|y\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle e_j|y\rangle \cdot |e_j\rangle$$

$$|x\rangle, |y\rangle \in S$$

$$\langle y|x\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle e_j|y\rangle^* \langle e_j| \cdot \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle |e_i\rangle =$$

$$= \sum_j \sum_i \langle e_j|y\rangle^* \langle e_i|x\rangle \cdot \underbrace{\langle e_j|e_i\rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\langle e_i|y\rangle^*}_{=\langle y|e_i\rangle} \langle e_i|x\rangle$$, τελικά η σχέση:

$$\boxed{\langle y|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle y|e_i\rangle \cdot \langle e_i|x\rangle}$$

λέγεται ισότητα του Parseval

Αν $|x\rangle \equiv |y\rangle$: $\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} |\langle e_i|x\rangle|^2$ (ορθοκανονικό σύστημα, πλήρες)

Αν το ορθοκανονικό σύστημα δεν είναι πλήρες : $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{n}$, $n<N$, τότε ισχύει η ανισότητα Bessel, δηλ.

$$\boxed{\langle x|x\rangle \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i|x\rangle|^2}$$

Παρατήρηση: Η ισότητα ισχύει όταν $n=N$ (πλήρες σύστημα)

Σχέση με την ανισότητα του Schwartz

Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $|x\rangle, |y\rangle \in S$ ισχύει:

$$\sqrt{\langle x|x\rangle}\sqrt{\langle y|y\rangle} \geq |\langle y|x\rangle|$$

Από ανισότητα Bessel κ. για $n=1$ έχουμε:

$$\langle x|x\rangle \geq |\langle e_1|x\rangle|^2$$

Επίσης το $e_1 = \dfrac{|y\rangle}{\sqrt{\langle y|y\rangle}}$ μοναδιαίο διάνυσμα, τότε:

$$\langle x|x\rangle \geq |\langle e_1|x\rangle|^2 = \frac{|\langle y|x\rangle|^2}{\langle y|y\rangle}$$

$$\Leftrightarrow \langle x|x\rangle \cdot \langle y|y\rangle \geq |\langle y|x\rangle|^2$$

Πρόταση: Για ένα πλήρες σύστημα ορθοκανονικών διανυσμάτων (βάση) $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ ισχύει ότι:

$$\langle x|e_i\rangle = 0 \quad \forall i = 1,2,\dots,N \implies |x\rangle = |0\rangle$$

Αποδ.:

Το $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ είναι πλήρες κ. ισχύει ότι:

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{N}\langle e_i|x\rangle|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{N}\langle x|e_i\rangle^*|e_i\rangle$$

όμως το $\langle x|e_i\rangle = 0 \quad \forall i$

τότε $|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} 0\cdot|e_i\rangle = |0\rangle$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx)$,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx),$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$

Να βρεθούν όλα τα πιθανά εσωτερικά γινόμενα στο $[-\pi, \pi]$, $\langle f|g \rangle$, $\langle f|h \rangle$, $\langle g|h \rangle$, $\langle f|f \rangle$

<u>ΛΥΣΗ</u>:

$$\langle f|h \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) h(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \cos(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2mx) dx$$

$$= 0$$

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) g(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) dx = 0$$

$$\langle g|h \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g^*(x) h(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos(mx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx = 0$$

$$\langle f|f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) \cdot f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) dx \neq 0$$

Διανυσματικοί χώροι απείρων διαστάσεων

Πολλές από τις έννοιες που συναντήσαμε στους δ.χ. πεπερασμένης διάστασης μπορούν να γενικευτούν σε χώρους απείρων διαστάσεων. Νέες έννοιες είναι:

1) Σύγκλιση ακολουθ. απείρων στοιχείων
2) Η έννοια της Πληρότητας δ.χ. απείρων διαστάσεων

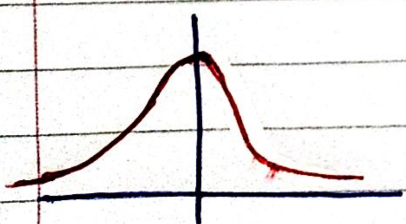
Ο δ.χ. H είναι απειροδιάστατος όταν ο αριθμός των γραμμ. ανεξαρτήτων διαν/των του δεν είναι πεπερασμένος, δηλ. $N \to \infty$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: Ένας τέτοιος χώρος είναι ο F, ο χώρος των συνεχών συν/σεων στο $[a, b]$.
Σ' αυτόν τα διαν/τα $|f\rangle$ κ. $|g\rangle$ είναι οι συνεχείς συν/σεις $f(x)$, $g(x)$, $x \in [a, b]$
Εσωτερικό γινόμενο: $\langle f | g \rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) g(x) dx$

όπου $w(x)$: πραγματική, θετική κ. συνεχής στο $[a, b]$ συν/ση πυκνότητας ή βάρους

Στον F ορίζονται ορθοκανονικά διαν/τα $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ που αντιστοιχούν στις ορθοκανονικές συν/σεις $e_1(x)$, $e_2(x)$, ..., $e_k(x)$, ... με ιδιότητα:

$$\langle e_m | e_n \rangle = \int_a^b e_m^*(x) e_n(x) W(x) dx = \delta_{mn}$$



π.χ. $w(x) = e^{-x^2}$